Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Εξετάσεις 20/5/2015

Θέματα – Λύσεις

Επιμέλεια: Λευτέρης Φράγκος, Κώστας Αλεξόπουλος, Άννα Σκαλίδου

ΘΕΜΑ Β

Έστω $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{\Gamma}$ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου $\boldsymbol{\Omega}$. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A \cap B}$ και $\boldsymbol{A \cup B}$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $\boldsymbol{(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου $\boldsymbol{\Gamma}$ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $\boldsymbol{(9x^2-3x-2)=0}$.

Β1 Να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=\frac{1}{4}}$ και $\boldsymbol{P(A\cup B)=\frac{1}{2}}$.

Μονάδες 5

Λύση

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1}{3} \\ 8x^2-6x+1=0 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2} \text{ ή } x_3=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B) \leq P(A) \leq P(A\cup B) \Rightarrow$$
$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}, P(A)=\frac{1}{3}, P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$$

B2 Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: ≪πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ≫.

Μονάδες 8

Λύση

$$P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P((A \cup B)') =$$
$$1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P((A \cap B)') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

B3 Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

E: ≪ πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ≫.

Μονάδες 6

Λύση

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) =$$
$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(E) = P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) =$$
$$P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B) =$$
$$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} - \frac{6}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

B4 Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{\Gamma}$ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

Λύση

$P(\Gamma) = \{x \in [0,1] : 9x^2 - 3x - 2 = 0\} = \left\{x \in [0,1] : x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = -\frac{1}{3}\right\} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

Άρα $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$ άτοπο.

Άρα B, Γ μη ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα I**, όπου $f_i\%,\ i = 1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3η κλάση είναι 108^o.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

Κλάσεις	$f_i\%$
$[8, 10)$	
$[10, 12)$	
$[12, 14)$	
$[14, 16)$	
$[16, 18)$	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1 Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10, f_2\% = 10, f_3\% = 30, f_4\% = 20, f_5\% = 30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Λύση

$$\alpha_3 = 108 \Rightarrow f_3 = \frac{108}{360} = 0,3$$

$$f_2\% + f_4\% = 30 \Rightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (1)$$

$$\bar{x} = 14 \Rightarrow 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14 \Rightarrow$$

$$0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1 = 14 \Rightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$3,3 - 11 \cdot f_4 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \Rightarrow 4 \cdot f_4 = 0,8 \Rightarrow f_4 = 0,2 \Rightarrow f_2 = 0,1$$

Κλάσεις	$f_i\%$
$[8, 10)$	10
$[10, 12)$	10
$[12, 14)$	30
$[14, 16)$	20
$[16, 18)$	50

Γ2 Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{\boldsymbol{6,6}} \simeq \boldsymbol{2,57}$.

Μονάδες 7

Λύση

$$\boldsymbol{S^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}) \cdot f_i =}$$

$$\boldsymbol{(9-14)^2 0,1 + (11-14)^2 0,1 + (13-14)^2 0,3 + (15-14)^2 0,2 + (17-14)^2 0,3 =}$$

$$\boldsymbol{2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6 \Rightarrow S = 2,57}$$

$\boldsymbol{CV = \dfrac{2,57}{14} > 0,1}$ άρα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3 Έστω $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3}$ και $\boldsymbol{x_4}$ τα κέντρα της $\boldsymbol{1^{\eta s}, 2^{\eta s}, 3^{\eta s}}$ και $\boldsymbol{4^{\eta s}}$ κλάσης αντίστοιχα και $\boldsymbol{\nu_1, \nu_2, \nu_3}$ και $\boldsymbol{\nu_4}$ οι συχνότητες της $\boldsymbol{1^{\eta s}, 2^{\eta s}, 3^{\eta s}}$ και $\boldsymbol{4^{\eta s}}$ κλάσης αντίστοιχα. Αν $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = 1780}$, να βρείτε το πλήθος $\boldsymbol{\nu}$ των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Λύση

$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i}{\nu} + x_5 \cdot f_5 \Rightarrow 14 = \frac{1780}{\nu} + 5,1 \Rightarrow 8,9 = \frac{1780}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1780}{8,9} = 200}$$

Γ4 Έστω $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5}$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα $\boldsymbol{\nu}$ παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\boldsymbol{\bar{\alpha}}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και $\boldsymbol{S_\alpha}$ την τυπική τους απόκλιση.

Εάν $\boldsymbol{\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}}$, για $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, 4, 5}$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\boldsymbol{\bar{\beta}}$ του δείγματος $\boldsymbol{\beta_i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5}$ είναι ίση με $\boldsymbol{0}$ και η τυπική του απόκλιση $\boldsymbol{S_\beta}$ είναι ίση με $\boldsymbol{1}$.

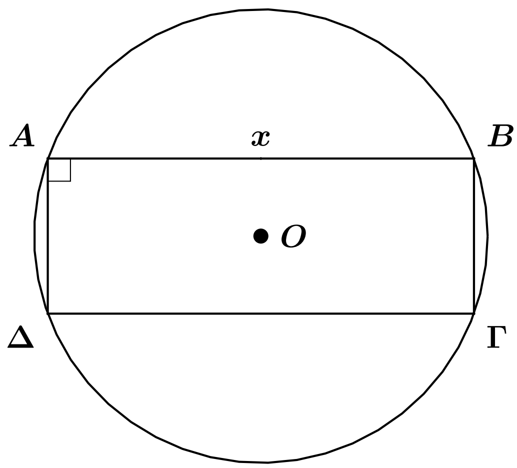
Μονάδες 7

Λύση

$$\beta_i = \frac{1}{S_\alpha}\alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} \Rightarrow \bar{\beta} = \frac{1}{S_\alpha}\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0 \text{ και } S_\beta = \left|\frac{1}{S_\alpha}\right| S_\alpha = \frac{1}{S_\alpha} S_\alpha = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O, ρ) με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Λύση

Εφαρμόζω **Πυθαγόρειο Θεώρημα** στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow 100 = x^2 + B\Gamma^2 \Leftrightarrow 0 < B\Gamma^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

Άρα $f(x) = AB \cdot B\Gamma = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ x \in (0, 10)$.

Δ2 Να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του $\boldsymbol{x}$, δείξτε ότι το ορθογώνιο $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Λύση

$$f'(x) = \sqrt{100-x^2} - x\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}2x = \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{100-x^2} \geq \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} \Rightarrow 100 - x^2 \geq x^2 \Rightarrow 100 \geq 2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 \geq x^2 \Rightarrow x^2 \leq 50 \Rightarrow |x| \leq 5\sqrt{2} \Rightarrow 0 < x \leq 5\sqrt{2}.$$

x	0 $\quad$ $5\sqrt{2}$ $\quad$ 10
$f'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f(x)$	$\uparrow$ $\qquad$ $\downarrow$

Για $x = 5\sqrt{2} = AB$ έχω $B\Gamma = \sqrt{100-x^2} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow x = B\Gamma$. Άρα είναι τετράγωνο.

Δ3 Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}$.

Μονάδες 8

Λύση

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{98\cdot x} = \frac{1}{98}\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} =$$

$$\frac{1}{98}f'(1) = \frac{1}{98}\left(\sqrt{99} - \frac{1}{\sqrt{99}}\right) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}.$$

Δ4 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν $P(A-B) > 0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

Μονάδες 8

Λύση

Αφού $A - B \subseteq A$ τότε $P(A-B) \leq P(A)$.

$$f \uparrow \Rightarrow f(P(A-B)) \leq f(P(A)) \Rightarrow$$

$$P(A-B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A-B)} \leq P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)} \Rightarrow$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}$$

$f \uparrow$ διότι $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}, \dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}$ τιμές μικρότερες του $5\sqrt{2}$.

Άρα $f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$.